Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Soluzioni 8 - 10 Dicembre 2013

1. Procediamo come nelle soluzioni del precedente tutorato:

   (a) $y'(x) = y(x)\sin(x) + \sin(2x)$: Sia $y(x) = u(x)v(x)$, cosí che

   $$y'(x) = y(x)\sin(x)+\sin(2x) \Longleftrightarrow v(x)[u'(x)-u(x)\sin(x)]+u(x)v'(x) = \sin(2x) .$$

   Consideriamo $u'(x) - u(x)\sin(x) = 0$ e cerchiamo la sua soluzione:

   $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \sin(x) \Longleftrightarrow \log(u(x)) = -\cos(x) \Longleftrightarrow u(x) = e^{-\cos(x)}.$$

   Sostituendo la $u(x)$ trovata otteniamo che

   $$e^{-\cos(x)}v'(x) = \sin(2x) \Longleftrightarrow v'(x) = \sin(2x)e^{\cos(x)} \Longleftrightarrow v(x) = \int \sin(2x)e^{\cos(x)}\ dx.$$

   Ma

   $$\int \sin(2x)e^{\cos(x)}\ dx = 2\int \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)}\ dx =_{(\cos(x)=t)} -2\int te^t\ dt =$$

   $$= -2(te^t - e^t) + c = -2e^{\cos(x)}(\cos(x) - 1) + c = v(x).$$

   Quindi

   $$y(x) = u(x)v(x) = e^{-\cos(x)}[-2e^{\cos(x)}(\cos(x)-1)+c] = 2-2\cos(x)+ce^{-\cos(x)} .$$

   Imponendo il dato iniziale abbiamo che

   $$-2 = y(0) = ce^{-1} \Longrightarrow c = -2e \Longrightarrow y(x) = 2 - 2\cos(x) - 2e^{1-\cos(x)} ;$$

   (b) $y'(x) = \frac{xy(x)}{(x-1)^2} \Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$, quindi

   $$\log(y(x)) = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \log(x-1) - \frac{1}{x-1} + c \Longrightarrow$$

   $$\Longrightarrow y(x) = K(x-1)e^{-\frac{1}{x-1}}.$$

   Imponiamo il dato iniziale:

   $$1 = y(2) = Ke^{-1} \Longrightarrow K = e \Longrightarrow y(x) = (x-1)e^{\frac{x-2}{x-1}} ;$$

   (c) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x$: $P(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha-1)^2$, quindi

   $$y_O(x) = Ae^x + Bxe^x.$$

La soluzione particolare sará $y_P(x) = K_1 + K_2 x$.
Essendo $y_P'(x) = K_2$ e $y_P''(x) = 0$, abbiamo che

$$y_P''(x) - 2y_P'(x) + y_P(x) = x \Longleftrightarrow K_1 - 2K_2 + K_2 x = x \Longleftrightarrow \begin{cases} K_1 = 2 \\ K_2 = 1 \end{cases} .$$

Dunque $y_P(x) = x + 2$, quindi

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + x + 2 .$$

Essendo $y'(x) = (A + B)e^x + Bxe^x + 1$ si ha che

$$\begin{cases} y'(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A + B + 1 = 2 \\ A + 2 = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{e quindi}$$

$$y(x) = e^x + x + 2 ;$$

(d) $y''''(x) + y'''(x) - 2y''(x) - 3y'(x) - 3y(x) = x^2$: abbiamo che $P(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha - 3 = (\alpha^2 - 3)(\alpha^2 + \alpha + 1)$, quindi

$$y_O(x) = Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x} + Ce^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + De^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

La soluzione particolare sará $y_P(x) = K_1 x^2 + K_2 x + K_3$.
Essendo $y_P'(x) = 2K_1 x + K_2$, $y_P''(x) = 2K_1$, $y_P'''(x) = y_P''''(x) = 0$ abbiamo che

$$y_P''''(x) + y_P'''(x) - 2y_P''(x) - 3y_P'(x) - 3y_P(x) = x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow -[4K_1 + 3K_2 + 3K_3 + 3(2K_1 + K_2)x + 3K_1 x^2] = x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4K_1 + 3(K_2 + K_3) = 0 \\ 2K_1 + K_2 = 0 \\ -3K_1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} K_1 = -\frac{1}{3} \\ K_2 = \ \frac{2}{3} \\ K_3 = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_P(x) = -\frac{1}{9}(3x^2 - 6x + 2).$$

Dunque

$$y(x) = Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x} + Ce^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + De^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{1}{9}(3x^2 - 6x + 2).$$

Deriviamo:

$$y'(x) = \sqrt{3}Ae^{\sqrt{3}x} - \sqrt{3}Be^{-\sqrt{3}x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}D - \frac{C}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$

$$-\left(\frac{D}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}C\right) e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{2}{3}(x - 1) ;$$

$$y''(x) = 3Ae^{\sqrt{3}x} + 3Be^{-\sqrt{3}x} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}D + \frac{C}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{D}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{2}{3} \ ;$$

$$y'''(x) = 3\sqrt{3}Ae^{\sqrt{3}x} - 3\sqrt{3}Be^{-\sqrt{3}x} + Ce^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + De^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Pertanto

$$\begin{cases} y'''(0) = 0 \\ y''(0) = \ 3 \\ y'(0) = \ \frac{2}{3} \\ y(0) = \ 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\sqrt{3}(A-B) + C = 0 \\ 3(A+B) - \frac{1}{2}(C + \sqrt{3}D) - \frac{2}{3} = 3 \\ \sqrt{3}(A-B) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}D - C) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\ A + B + C - \frac{2}{9} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{11}{18} \\ B = \frac{11}{18} \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases} .$$

Dunque

$$y(x) = \frac{11}{18}(e^{\sqrt{3}x} + e^{-\sqrt{3}x}) - \frac{1}{9}(3x^2 - 6x + 2) = \frac{11\cosh(\sqrt{3}x) - 3x^2 + 6x - 2}{9} \ ;$$

(e) $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \cos(2x)$: $P(\alpha) = \alpha^2 + 4\alpha + 4 = (\alpha + 2)^2$, quindi

$$y_O(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} \ .$$

La soluzione particolare sará $y_P(x) = K_1 \cos(2x) + K_2 \sin(2x)$.
Essendo $y'_P(x) = -2K_1 \sin(2x) + 2K_2 \cos(2x)$, $y''_P(x) = -4y_P(x)$ si ha che

$$y''_P(x) + 4y'_P(x) + 4y_P(x) = \cos(2x) \iff 8K_2 \cos(2x) - 8K_1 \sin(2x) = \cos(2x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = \frac{1}{8} \end{cases} \implies y_P(x) = \frac{\sin(2x)}{8} \ ;$$

Pertanto

$$y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + \frac{\sin(2x)}{8}.$$

Essendo $y'(x) = (B - 2A)e^{-2x} - 2Bxe^{-2x} + \frac{\cos(2x)}{4}$ abbiamo che

$$\begin{cases} y'(\pi) = \frac{1}{4} \\ y(\pi) \ = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-2\pi}(B - 2A - 2B\pi) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ e^{-2\pi}(A + B\pi) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} .$$

Pertanto $y(x) = \dfrac{\sin(2x)}{8}$;

(f) $y'''''(x) - 4y''''(x) + 5y'''(x) - 4y''(x) + 4y'(x) = \cos(x)$: abbiamo che $P(\alpha) = \alpha^5 - 4\alpha^4 + 5\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha = \alpha(\alpha^2 + 1)(\alpha - 2)^2$, dunque

$$y_O(x) = A + Be^{2x} + Cxe^{2x} + D\cos(x) + E\sin(x).$$

La soluzione particolare sará $y_P = K_1 x \cos(x) + K_2 x \sin(x)$.
Deriviamo:

$$y'_P(x) = K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x) - K_1 x \sin(x) + K_2 x \cos(x) \ ;$$

$$y_P''(x) = -2K_1\sin(x) + 2K_2\cos(x) - K_1 x\cos(x) - K_2 x\sin(x)\ ;$$
$$y_P'''(x) = -3K_1\cos(x) - 3K_2\sin(x) + K_1 x\sin(x) - K_2 x\cos(x)\ ;$$
$$y_P''''(x) = 4K_1\sin(x) - 4K_2\cos(x) + K_1 x\cos(x) + K_2 x\sin(x)\ ;$$
$$y_P'''''(x) = 5K_1\cos(x) + 5K_2\sin(x) - K_1 x\sin(x) + K_2 x\cos(x)\ .$$

Quindi

$$y_P'''''(x) - 4y_P''''(x) + 5y_P'''(x) - 4y_P''(x) + 4y_P'(x) = \cos(x) \iff$$

$$\iff (8K_2 - 6K_1)\cos(x) - (6K_2 + 8K_1)\sin(x) = \cos(x) \iff \begin{cases} 8K_2 - 6K_1 = 1 \\ 6K_2 + 8K_1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} K_1 = -\frac{3}{50} \\ K_2 = \ \ \frac{2}{25} \end{cases} \implies y_P(x) = -\frac{3}{50}x\cos(x) + \frac{2}{25}x\sin(x).$$ Dunque

$$y(x) = A + Be^{2x} + Cxe^{2x} + D\cos(x) + E\sin(x) - \frac{3}{50}x\cos(x) + \frac{2}{25}x\sin(x).$$

Andiamo a derivare:

$$y'(x) = (2B+C)e^{2x} + 2Cxe^{2x} + \left(\frac{2}{25} - D\right)\sin(x) + \left(E - \frac{3}{50}\right)\cos(x) + \\ + \frac{3}{50}x\sin(x) + \frac{2}{25}x\cos(x)\ ;$$

$$y''(x) = (4B+4C)e^{2x} + 4Cxe^{2x} + \left(\frac{4}{25} - D\right)\cos(x) + \left(\frac{3}{25} - E\right)\sin(x) + \\ + \frac{3}{50}x\cos(x) - \frac{2}{25}x\sin(x)\ ;$$

$$y'''(x) = (8B+12C)e^{2x} + 8Cxe^{2x} + \left(D - \frac{6}{25}\right)\sin(x) + \left(\frac{9}{50} - E\right)\cos(x) + \\ - \frac{3}{50}x\sin(x) - \frac{2}{25}x\cos(x)\ ;$$

$$y''''(x) = (16B+32C)e^{2x} + 16Cxe^{2x} + \left(D - \frac{8}{25}\right)\cos(x) + \left(E - \frac{6}{25}\right)\sin(x) + \\ - \frac{3}{50}x\cos(x) + \frac{2}{25}x\sin(x)\ ;$$

Pertanto

$$\begin{cases} y''''(0) = -\frac{56}{25} \\ y'''(0) = -\frac{23}{50} \\ y''(0) = \ 0 \\ y'(0) = -\frac{3}{50} \\ y(0) \ = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 16B + 32C + D - \frac{8}{25} = -\frac{56}{25} \\ 8B + 12C + \frac{9}{50} - E = -\frac{23}{50} \\ 4(B+C) + \frac{4}{25} - D = \ 0 \\ 2B + C + E - \frac{3}{50} = -\frac{3}{50} \\ A + B + D = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{25} \\ B = \ \ \frac{1}{25} \\ C = -\frac{2}{25} \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies y(x) = \frac{e^{2x}(1-2x) - 1}{25} - \frac{3}{50}x\cos(x) + \frac{2}{25}x\sin(x)\ ;$$

(g) $y''(x)+2y'(x)+2y(x)=4\sin(2x):\quad P(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \alpha=-1\pm i \Longrightarrow y_O(x)=Ae^{-x}\cos(x)+Be^{-x}\sin(x)$.
La soluzione particolare sará $y_P(x)=K_1\sin(2x)+K_2\cos(2x)$.
Essendo $y_P'(x)=2K_1\cos(2x)-2K_2\sin(2x),\quad y_P''(x)=-4y_P(x)$ abbiamo che

$$y_P''(x)+2y_P'(x)+2y_P(x)=4\sin(2x) \Longleftrightarrow (4K_1-2K_2)\cos(2x)-(4K_2+2K_1)\sin(2x)=$$

$$=4\sin(2x) \Longleftrightarrow \begin{cases} 4K_1-2K_2=0 \\ -(4K_2+2K_1)=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} K_1=-\frac{2}{5} \\ K_2=-\frac{4}{5} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y_P(x)=-\frac{2}{5}(\sin(2x)+2\cos(2x))\ ;$$

Dunque $y(x)=Ae^{-x}\cos(x)+Be^{-x}\sin(x)-\frac{2}{5}(\sin(2x)+2\cos(2x))$.
Essendo

$$y'(x)=(B-A)e^{-x}\cos(x)-(A+B)e^{-x}\sin(x)-\frac{4}{5}(\cos(2x)-2\sin(2x))$$

abbiamo che

$$\begin{cases} y'(\frac{\pi}{2})=-\frac{6}{5} \\ y(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -(A+B)e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{4}{5}=-\frac{6}{5} \\ Be^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{4}{5}=-\frac{1}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=3e^{\frac{\pi}{2}} \\ B=-e^{\frac{\pi}{2}} \end{cases}\ .$$

Dunque

$$y(x)=3e^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x)-e^{\frac{\pi}{2}-x}\sin(x)-\frac{2}{5}(\sin(2x)+2\cos(2x))\ ;$$

(h) $y'''(x)+y''(x)-2y'(x)=e^x+xe^{-2x}+x^2:\quad P(\alpha)=\alpha^3+\alpha^2-2\alpha=$
$=\alpha(\alpha+2)(\alpha-1) \Longrightarrow y_O(x)=A+Be^{-2x}+Ce^x$.
In questo caso avremo tre soluzioni particolari.
La prima soluzione particolare sará $y_{P_1}(x)=Kxe^x$.
Essendo

$$\frac{d^n}{dx^n}y_{P_1}(x)=nKe^x+y_{P_1}(x)\quad \text{abbiamo che}$$

$$y_{P_1}'''(x)+y_{P_1}''(x)-2y_{P_1}'(x)=e^x \Longleftrightarrow 3Ke^x=e^x \Longleftrightarrow K=\frac{1}{3} \Longrightarrow y_{P_1}(x)=\frac{xe^x}{3}\ ;$$

La seconda soluzione particolare sará $y_{P_2}(x)=K_1xe^{-2x}+K_2x^2e^{-2x}$.
Essendo

$$y_{P_2}'(x)=K_1e^{-2x}+(-2K_1+2K_2)xe^{-2x}-2K_2x^2e^{-2x}\ ;$$

$$y_{P_2}''(x)=(-4K_1+2K_2)e^{-2x}+(4K_1-8K_2)xe^{-2x}+4K_2x^2e^{-2x}\ ;$$

$$y_{P_2}'''(x)=(12K_1-12K_2)e^{-2x}+(-8K_1+24K_2)xe^{-2x}-8K_2x^2e^{-2x}\ ;$$

abbiamo che

$$y_{P_2}'''(x)+y_{P_2}''(x)-2y_{P_2}'(x)=xe^{-2x} \Longleftrightarrow (6K_1-10K_2)e^{-2x}+12K_2xe^{-2x}=xe^{-2x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6K_1-10K_2=0 \\ 12K_2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} K_1=\frac{5}{36} \\ K_2=\frac{1}{12} \end{cases} \Longrightarrow y_{P_2}(x)=\frac{x(3x+5)e^{-2x}}{36}\ ;$$

La terza soluzione particolare sará $y_{P_3}(x) = K_3 x + K_4 x^2 + K_5 x^3$.
Essendo

$$y'_{P_3}(x) = K_3 + 2K_4 x + 3K_5 x^2, \quad y''_{P_3}(x) = 2K_4 + 6K_5 x, \quad y'''_{P_3}(x) = 6K_5,$$

abbiamo che

$$y'''_{P_3}(x) + y''_{P_3}(x) - 2y'_{P_3}(x) = x^2 \iff 6K_5 + 2K_4 - 2K_3 + (6K_5 - 4K_4)x - 6K_5 x^2 = x^2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 6K_5 + 2K_4 - 2K_3 = 0 \\ 6K_5 - 4K_4 = 0 \\ -6K_5 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} K_3 = -\frac{3}{4} \\ K_4 = -\frac{1}{4} \\ K_5 = -\frac{1}{6} \end{cases} \implies y_{P_3}(x) = -\frac{1}{12}(2x^3 + 3x^2 + 9x) \,;$$

Dunque

$$y(x) = A + Be^{-2x} + Ce^x + \frac{xe^x}{3} + \frac{x(3x+5)e^{-2x}}{36} - \frac{1}{12}(2x^3 + 3x^2 + 9x) \,.$$

Deriviamo:

$$y'(x) = \frac{e^x}{3}(3C + x + 1) + \frac{e^{-2x}}{36}(5 - 4x - 6x^2 - 72B) - \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 3) \,;$$

$$y''(x) = \frac{e^x}{3}(3C + x + 2) + \frac{e^{-2x}}{36}(12x^2 - 4x - 14 + 144B) - \frac{1}{2}(2x + 1) \,.$$

Quindi

$$\begin{cases} y''(0) = \frac{124}{9} \\ y'(0) = -\frac{77}{18} \\ y(0) = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} C + \frac{2}{3} - \frac{7}{18} + 4B - \frac{1}{2} = \frac{124}{9} \\ C + \frac{1}{3} + \frac{5}{36} - 2B - \frac{3}{4} = -\frac{77}{18} \\ A + B + C = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = 2 \end{cases} \,.$$

Pertanto

$$y(x) = 1 + \frac{e^x}{3}(x + 6) + \frac{e^{-2x}}{36}(3x^2 + 5x + 108) - \frac{1}{12}(2x^3 + 3x^2 + 9x) \,.$$

2. Per calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ sfruttiamo lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = x^3$ in $[-\pi, \pi]$.
Essendo $f(x)$ una funzione dispari, gli unici coefficienti che ci interessa calcolare sono i b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left\{ \left[-\frac{x^3 \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx \right\} =$$

$$= -\frac{2\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{6}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = -\frac{2\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{12}{n^2\pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx =$$

$$= -\frac{2\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{12}{n^3\pi}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{2\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3} = \frac{2(-1)^n}{n}\left(\frac{6}{n^2} - \pi^2\right).$$

Possiamo ora applicare l'identitá di Parseval per ottenere il valore della serie da calcolare. Difatti

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2 \iff \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^6 \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}\left(\frac{6}{n^2} - \pi^2\right)^2 \iff$$

$$\iff \frac{2}{7}\pi^6 = 144\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + 4\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 48\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = 144\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + 4\pi^4\left(\frac{\pi^2}{6}\right) - 48\pi^2\left(\frac{\pi^4}{90}\right) \iff$$

$$\iff 144\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \pi^6\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{3} + \frac{8}{15}\right) = \frac{16}{105}\pi^6 \implies \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{16}{105}\left(\frac{\pi^6}{144}\right) = \frac{\pi^6}{945} \; .$$

Dobbiamo ora vedere che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{3}{5}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)\left(\frac{\pi^6}{945}\right) = \frac{\pi^8}{9450} \; .$$

Per fare questo applichiamo l'identitá di Parseval a $g(x) = x^4$.
Abbiamo visto (Tutorato 5) che

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) - 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx) \; ,$$

cioé

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{5}\pi^4 \\ a_n = \frac{8(-1)^n}{n^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right) \quad \text{per} \quad n \geq 1 \\ b_n = 0 \quad \forall\, n \end{cases} .$$

Dunque

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2 \iff \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^8 \, dx = \frac{2}{25}\pi^8 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{64}{n^4}\left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right)^2 \iff$$

$$\iff \frac{2}{9}\pi^8 = \frac{2}{25}\pi^8 + 64\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + 2304\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} - 768\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} \iff$$

$$\iff \frac{2}{9}\pi^8 = \frac{2}{25}\pi^8 + 64\pi^4\left(\frac{\pi^4}{90}\right) + 2304\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} - 768\pi^2\left(\frac{\pi^6}{945}\right) \iff$$

$$\iff 2304\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} = 2\pi^8\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25} - \frac{16}{45} + \frac{128}{315}\right) = \frac{128}{525}\pi^8 \iff 18\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{525}$$

che ci dice che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{525}\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{\pi^8}{9450}$$

che é quello che volevamo.

3. Per il teorema fondamentale del calcolo si ha che ,$\forall\ f \in F$, $\Phi(f)$ é una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ (indi continua) nell'intervallo $[0,1]$. Inoltre
$$0 \le \Phi(f)(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x tf(t)\ dt \le \frac{1}{2} + \int_0^x t\ dt = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ .$$
Quindi $\Phi(f) \in F\ \forall\ f \in F \Longrightarrow \Phi(F) \subseteq F$.
Per far vedere che Φ é una contrazione basta osservare che se $f, g \in F$ allora $\forall\ x \in [0,1]$ si ha che
$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left|\frac{1}{2} + \int_0^x tf(t)\ dt - \frac{1}{2} - \int_0^x tg(t)\ dt\right| = \left|\int_0^x t(f(t) - g(t))\ dt\right| \le$$
$$\le \int_0^x t|f(t) - g(t)|\ dt \le \int_0^x t||f - g||_\infty\ dt = ||f-g||_\infty \int_0^x t\ dt = ||f-g||_\infty \frac{x^2}{2} \le \frac{1}{2}||f-g||_\infty\ .$$
Quindi
$$||\Phi(f) - \Phi(g)||_\infty \le \frac{1}{2}||f - g||_\infty$$
e pertanto Φ é una contrazione in $(F, ||\cdot||_\infty)$.

4. $\forall\ x \in [0,1]$ si ha che
$$|\Psi(f)(x) - \Psi(g)(x)| = \left|\int_0^x \left[\sin\left(\frac{f(t)}{t^2+1}\right) - \sin\left(\frac{g(t)}{t^2+1}\right)\right] dt\right| \le$$
$$\le \int_0^x \left|\sin\left(\frac{f(t)}{t^2+1}\right) - \sin\left(\frac{g(t)}{t^2+1}\right)\right| dt \le \int_0^x \frac{|f(t) - g(t)|}{t^2+1} dt \le \int_0^x \frac{||f-g||_\infty}{t^2+1} dt =$$
$$= ||f-g||_\infty \arctan(x) \le \frac{\pi}{4}||f-g||_\infty \Longrightarrow ||\Psi(f) - \Psi(g)||_\infty \le \frac{\pi}{4}||f-g||_\infty.$$
Pertanto Ψ é una contrazione in $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

5. (a) Abbiamo che:
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(\phi(x)t^2)}{t}\right) = \cos(\phi(x)t^2)t\phi'(x).$$
Essendo
$$\lim_{t \to 0} \frac{\cos(\phi(x)t^2)t\phi'(x)}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = 0$$
si ha che
$$\int_0^1 \cos(\phi(x)t^2)t\phi'(x)\ dt \le \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$$
Dunque $F_\phi(x)$ é di classe $\mathcal{C}^1$ e pertanto
$$F'_\phi(x) = \int_0^1 \cos(\phi(x)t^2)t\phi'(x)\ dt =_{(\phi(x)t^2=s)} \frac{\phi'(x)}{2\phi(x)}\int_0^{\phi(x)} \cos(s)\ ds \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F'_\phi(x) = \frac{\phi'(x)}{2\phi(x)}\sin(\phi(x))\ ;$$
(b) Affinché sia $F'_\phi(x) = \sin(\phi(x))$, deve valere che $\frac{\phi'(x)}{2\phi(x)} = 1$.
Ma questo é vero se e solo se
$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = 2 \Longleftrightarrow \log(\phi(x)) = 2x + c \Longleftrightarrow \phi(x) = Ke^{2x}.$$

6. (a) Consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log(x)}\ dx\ .$$

Usando la formula di derivazione sotto segno di integrale otteniamo che

$$g'(t) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{x^t - 1}{\log(x)}\right)\ dx = \int_0^1 x^t\ dx = \frac{1}{t+1}\ .$$

Dobbiamo dunque risolvere il Problema di Cauchy: $\begin{cases} g'(t) = \frac{1}{t+1} \\ g(0) = 0 \end{cases}$.

Ma

$$g'(t) = \frac{1}{t+1} \Longleftrightarrow g(t) = \log(t+1) + c$$

e $0 = g(0) = c \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow g(t) = \log(t+1)$.
Pertanto

$$g(1) = \int_0^1 \frac{x-1}{\log(x)}\ dx = \log(2)\ ;$$

(b) Consideriamo la funzione $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$h(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha\tan(x))}{\tan(x)}\ dx$$

Usando la formula di derivazione sotto segno di integrale otteniamo che

$$h'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\arctan(\alpha\tan(x))}{\tan(x)}\right)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha^2\tan^2(x)} =_{(y=\tan(x))}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+\alpha^2 y^2)} = \frac{\pi}{2(\alpha+1)} \quad \text{(vedi Esercizio 1 del Tutorato 5).}$$

Dobbiamo dunque risolvere il problema di Cauchy : $\begin{cases} h'(\alpha) = \frac{\pi}{2(\alpha+1)} \\ h(0) = 0 \end{cases}$.

Ma

$$h'(\alpha) = \frac{\pi}{2(\alpha+1)} \Longleftrightarrow h(\alpha) = \frac{\pi}{2}\log(\alpha+1) + c$$

e $0 = h(0) = c \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow h(\alpha) = \frac{\pi}{2}\log(\alpha+1)$.
Pertanto

$$h(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\ dx = \frac{\pi}{2}\log(2)\ ;$$

(c) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\ dx.$$

Essendo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\right) = -\frac{2t}{x^2}e^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}$$

e

$$\int_0^{+\infty} -\frac{2t}{x^2} e^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\ dx = \int_0^1 -\frac{2t}{x^2} e^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\ dx + \int_1^{+\infty} -\frac{2t}{x^2} e^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\ dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty \quad \text{abbiamo che}$$

$$f'(t) = \int_0^{+\infty} -\frac{2t}{x^2} e^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\ dx =_{(y=\frac{t}{x})} \int_{+\infty}^0 2e^{-\left(y^2+\frac{t^2}{y^2}\right)}\ dy = -2f(t)\ .$$

Dobbiamo quindi risolvere il Problema di Cauchy: $\begin{cases} f'(t) = -2f(t) \\ f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$.

Ma

$$f'(t) = -2f(t) \iff \frac{f'(t)}{f(t)} = -2 \iff f(t) = Ke^{-2t}$$

ed essendo $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = f(0) = K \Longrightarrow K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Longrightarrow f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{2t}}$.
Dunque

$$f(1) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}\ .$$

NB. I dati iniziali scelti per i problemi di Cauchy dell'esercizio 6 sono stati scelti per semplicitá.
Difatti per i casi (b) e (c) la scelta é dipesa dal fatto che le funzioni $g(t)$ ed $h(\alpha)$ in 0 sono nulle, mentre per $f(t)$ la scelta é dipesa dal fatto che $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$ é un integrale noto, essendo

$$f(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

giacché $P(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$ é la funzione di densitá di probabilitá della distribuzione Normale con media nulla e varianza pari ad $\frac{1}{2}$.